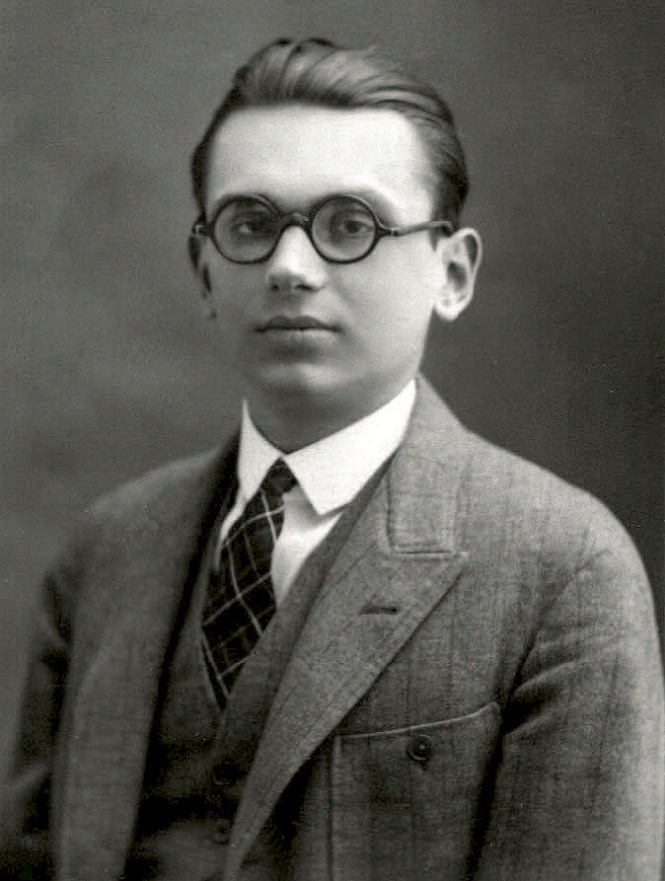
“Mọi hệ thống toán học đều có một số phát biểu không bao giờ có thể chứng minh được.”

- Natalie Wolchover

Biên tập viên cao cấp

Ngày 14 tháng 7 năm 2020 –



*Kurt Gödel khi còn là sinh viên ở Vienna. Ông đã công bố các định lý bất toàn của mình vào năm 1931, một năm sau khi tốt nghiệp.*

[*Kurt Gödel Papers, Trung tâm lưu trữ Shelby White và Leon Levy, Viện nghiên cứu nâng cao*](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Young_Kurt_G%C3%B6del_as_a_student_in_1925.jpg)

V

ào năm 1931, nhà logic học người Áo Kurt Gödel đã đạt được một trong những thành tựu trí tuệ đáng kinh ngạc nhất trong lịch sử.

Các nhà toán học thời đó tìm kiếm một nền tảng vững chắc cho toán học: một tập hợp các sự kiện toán học cơ bản hoặc các tiên đề, vừa nhất quán — không bao giờ dẫn đến mâu thuẫn — vừa hoàn chỉnh, đóng vai trò là nền tảng của mọi chân lý toán học.

Nhưng định lý bất toàn gây sốc của Gödel, được công bố khi ông mới 25 tuổi, đã đập tan giấc mơ đó. Ông đã chứng minh rằng bất kỳ tập hợp tiên đề nào mà bạn có thể đưa ra làm nền tảng khả thi cho toán học chắc chắn sẽ không đầy đủ; sẽ luôn có những sự thật đúng về các con số không thể được chứng minh bằng các tiên đề đó. Ông cũng chỉ ra rằng không có tập hợp tiên đề ứng viên nào có thể chứng minh được tính nhất quán của chính nó.

Định lý bất toàn của ông có nghĩa là không thể có lý thuyết toán học về mọi thứ, không có sự thống nhất giữa những gì có thể chứng minh được và những gì là đúng. Những gì các nhà toán học có thể chứng minh phụ thuộc vào các giả định ban đầu của họ, không phải vào bất kỳ chân lý cơ bản nào mà từ đó tất cả các câu trả lời xuất phát.

Trong 89 năm kể từ khi Gödel phát hiện ra, các nhà toán học đã tình cờ phát hiện ra đúng loại câu hỏi không thể trả lời mà các định lý của ông đã tiên đoán. Ví dụ, chính Gödel đã giúp thiết lập rằng [giả thuyết liên tục](https://www.quantamagazine.org/to-settle-infinity-question-a-new-law-of-mathematics-20131126/) , liên quan đến kích thước của vô cực, là không thể quyết định được, cũng như bài toán dừng, đặt ra câu hỏi liệu một chương trình máy tính được cung cấp đầu vào ngẫu nhiên sẽ chạy mãi mãi hay cuối cùng sẽ dừng lại. Những câu hỏi không thể quyết định [thậm chí đã nảy sinh trong vật lý(mở một tab mới)](https://www.nature.com/news/paradox-at-the-heart-of-mathematics-makes-physics-problem-unanswerable-1.18983), cho rằng sự bất toàn của Gödel không chỉ ảnh hưởng đến toán học mà còn ảnh hưởng đến thực tế theo một cách khó hiểu nào đó.

Sau đây là bản tóm tắt đơn giản, không chính thức về cách Gödel chứng minh các định lý của mình.

**Đánh số Gödel**

Chiến thuật chính của Gödel là ánh xạ các phát biểu *về* một hệ tiên đề vào các phát biểu *trong* hệ thống — tức là vào các phát biểu về các con số. Ánh xạ này cho phép một hệ tiên đề nói một cách thuyết phục về chính nó.

Bước đầu tiên trong quá trình này là ánh xạ bất kỳ phát biểu toán học nào hoặc chuỗi phát biểu nào thành một con số duy nhất gọi là số Gödel.

Phiên bản sửa đổi một chút của sơ đồ Gödel được Ernest Nagel và James Newman trình bày trong cuốn sách năm 1958 của họ, *Gödel's Proof* , bắt đầu bằng 12 ký hiệu cơ bản đóng vai trò là từ vựng để diễn đạt một tập hợp các tiên đề cơ bản. Ví dụ, tuyên bố rằng một cái gì đó tồn tại có thể được diễn đạt bằng ký hiệu ∃, trong khi phép cộng được diễn đạt bằng +. Điều quan trọng là ký hiệu *s* , biểu thị "người kế nhiệm của", cung cấp một cách để chỉ định các số; ví dụ, *ss* 0, tham chiếu đến 2.

Mười hai biểu tượng này sau đó được gán số Gödel từ 1 đến 12.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Dấu hiệu hằng số** | **Số Gödel** | **Ý nghĩa thông thường** |
| ~ | 1 | không |
| ∨ | 2 | hoặc |
| ⊃ | 3 | nếu…thì… |
| ∃ | 4 | có một… |
| = | 5 | bằng nhau |
| 0 | 6 | số không |
| S | 7 | người  kế nhiệm của |
| ( | 8 | dấu chấm câu |
| ) | 9 | dấu chấm câu |
| , | 10 | dấu chấm câu |
| + | 11 | cộng thêm |
| × | 12 | lần |

Tiếp theo, các chữ cái biểu diễn các biến, bắt đầu bằng *x* , *y* và *z* , được ánh xạ vào các số nguyên tố lớn hơn 12 (tức là 13, 17, 19, …).

Khi đó, bất kỳ sự kết hợp nào giữa các ký hiệu và biến này — nghĩa là bất kỳ công thức số học hoặc chuỗi công thức nào có thể xây dựng được — đều có số Gödel riêng.

Ví dụ, hãy xem xét 0 = 0. Ba ký hiệu của công thức tương ứng với các số Gödel 6, 5 và 6. Gödel cần phải thay đổi chuỗi ba số này thành một số duy nhất, duy nhất — một số mà không có chuỗi ký hiệu nào khác tạo ra. Để làm điều này, ông lấy ba số nguyên tố đầu tiên (2, 3 và 5), nâng từng số lên số Gödel của ký hiệu ở cùng vị trí trong chuỗi và nhân chúng lại với nhau. Do đó, 0 = 0 trở thành 2 6 × 3 5 × 5 6 hoặc 243.000.000.

Phép ánh xạ này có hiệu quả vì không có hai công thức nào có thể cho ra cùng một số Gödel. Số Gödel là số nguyên, và số nguyên chỉ phân tích thành số nguyên tố theo một cách duy nhất. Vì vậy, phép phân tích thành thừa số nguyên tố duy nhất của 243.000.000 là 2 6 × 3 5 × 5 6 , nghĩa là chỉ có một cách có thể giải mã số Gödel: công thức 0 = 0.

Sau đó, Gödel tiến thêm một bước nữa. Một chứng minh toán học bao gồm một chuỗi các công thức. Vì vậy, Gödel cũng đã cấp cho mọi chuỗi công thức một số Gödel duy nhất. Trong trường hợp này, ông bắt đầu với danh sách các số nguyên tố như trước — 2, 3, 5, v.v. Sau đó, ông nâng từng số nguyên tố lên số Gödel của công thức ở cùng vị trí trong chuỗi (ví dụ: 2 243.000.000 × …, nếu 0 = 0 đứng đầu) và nhân tất cả lại với nhau.

**Số học siêu toán học**

Lợi ích thực sự là ngay cả những phát biểu *về* công thức số học, được gọi là phát biểu siêu toán học, cũng có thể được dịch thành công thức có số Gödel riêng.

Trước tiên hãy xem xét công thức ~(0 = 0), nghĩa là “số không không bằng số không”. Công thức này rõ ràng là sai. Tuy nhiên, nó có một số Gödel: 2 lũy thừa 1 (số Gödel của ký hiệu ~), nhân với 3 lũy thừa 8 (số Gödel của ký hiệu “dấu ngoặc đơn mở”), v.v., tạo ra 2¹ × 3 8 × 5 6 × 7 5 × 11 6 × 13 9 .

Bởi vì chúng ta có thể tạo ra số Gödel cho mọi công thức, ngay cả những công thức sai, nên chúng ta có thể nói một cách hợp lý về các công thức này bằng cách nói về số Gödel của chúng.

Hãy xem xét phát biểu, “Ký hiệu đầu tiên của công thức ~(0 = 0) là một dấu ngã.” Phát biểu siêu toán học (đúng) này về ~(0 = 0) được dịch thành một phát biểu về số Gödel của công thức — cụ thể là, số mũ đầu tiên của nó là 1, số Gödel cho một dấu ngã. Nói cách khác, phát biểu của chúng ta nói rằng 2¹ × 3 8 × 5 6 × 7 5 × 11 6 × 13 9   chỉ có một ước số duy nhất là 2. Nếu ~(0 = 0) bắt đầu bằng bất kỳ ký hiệu nào khác ngoài dấu ngã, thì số Gödel của nó sẽ có ít nhất hai ước số là 2. Vì vậy, chính xác hơn, 2 là ước số của 2¹ × 3 8 × 5 6 × 7 5 × 11 6 × 13 9 , nhưng 2 2 không phải là một ước số.

Chúng ta có thể chuyển đổi câu cuối cùng thành một công thức số học chính xác mà chúng ta có thể [viết \*](https://www.quantamagazine.org/how-godels-proof-works-20200714/#jump) bằng các ký hiệu cơ bản. Tất nhiên công thức này có một số Gödel, mà chúng ta có thể tính toán bằng cách ánh xạ các ký hiệu của nó vào lũy thừa của các số nguyên tố.

Nagel và Newman đã viết rằng ví dụ này “minh họa cho một hiểu biết sâu sắc và tổng quát nằm ở cốt lõi khám phá của Gödel: các đặc tính về kiểu chữ của chuỗi ký hiệu dài có thể được nói đến theo cách gián tiếp nhưng hoàn toàn chính xác bằng cách nói về các đặc tính của phép phân tích thừa số nguyên tố của các số nguyên lớn”.

Việc chuyển đổi thành ký hiệu cũng khả thi đối với phát biểu siêu toán học, “Tồn tại một số chuỗi công thức với số Gödel *x* chứng minh công thức với số Gödel *k* ” — hay nói ngắn gọn là “Công thức với số Gödel *k* có thể được chứng minh”. Khả năng “số học hóa” loại phát biểu này đã tạo tiền đề cho cuộc đảo chính.

**G chính nó**

Nhận thức sâu sắc hơn của Gödel là ông có thể thay thế số Gödel của công thức đó vào chính công thức đó, dẫn đến vô số rắc rối.

Để xem cách thức hoạt động của phép thay thế, hãy xem xét công thức (∃ *x* )( *x* = *sy).* (Công thức này đọc là, “Tồn tại một biến *x* là biến kế thừa của *y* ,” hay nói ngắn gọn là “ *y* có một biến kế thừa.”) Giống như tất cả các công thức, công thức này có một số Gödel — một số nguyên lớn mà chúng ta sẽ gọi là *m* .

Bây giờ chúng ta hãy đưa *m* vào công thức thay cho ký hiệu *y* . Điều này tạo thành một công thức mới, (∃ *x* )( *x*  =  *sm* ), nghĩa là, “ *m* có một số kế thừa”. Chúng ta sẽ gọi số Gödel của công thức này là gì? Có ba thông tin cần truyền đạt: Chúng ta bắt đầu với công thức có số Gödel là *m* . Trong đó, chúng ta thay thế *m* cho ký hiệu *y* . Và theo sơ đồ ánh xạ được giới thiệu trước đó, ký hiệu *y* có số Gödel là 17. Vì vậy, chúng ta hãy chỉ định số Gödel của công thức mới là sub( *m* , *m* , 17).

**Sự thay thế tạo nên cốt lõi trong bằng chứng của Gödel.**

Ông đã xem xét một phát biểu siêu toán học theo hướng “Công thức với số Gödel sub( *y* , *y* , 17) không thể được chứng minh.” Nhắc lại ký hiệu mà chúng ta vừa học, công thức với số Gödel sub( *y* , *y* , 17) là công thức thu được bằng cách lấy công thức với số Gödel *y* (một biến chưa biết) và thay thế biến *y* này vào bất kỳ đâu có ký hiệu có số Gödel là 17 (tức là bất kỳ đâu có *y* ).

Mọi thứ đang trở nên kỳ lạ, nhưng dù sao đi nữa, tuyên bố siêu toán học của chúng ta — “Công thức với số Gödel sub( *y* , *y* , 17) không thể được chứng minh” — chắc chắn sẽ được dịch thành một công thức với số Gödel duy nhất. Chúng ta hãy gọi nó *là n* .

Bây giờ, một vòng thay thế cuối cùng: Gödel tạo ra một công thức mới bằng cách thay thế số *n* ở bất kỳ đâu có *y* trong công thức trước đó. Công thức mới của ông đọc là, “Công thức với số Gödel sub( *n* , *n* , 17) không thể được chứng minh.” Chúng ta hãy gọi công thức mới này là G.

Tất nhiên, G có số Gödel. Giá trị của nó là bao nhiêu? Lo và behold, nó phải là sub( *n* , *n* , 17). Theo định nghĩa, sub( *n* , *n* , 17) là số Gödel của công thức thu được từ việc lấy công thức với số Gödel *n* và thay *n* vào bất kỳ chỗ nào có ký hiệu bằng số Gödel 17. Và G chính xác là công thức này! Do tính duy nhất của phân tích thừa số nguyên tố, giờ chúng ta thấy rằng công thức mà G đang nói đến không gì khác ngoài chính G.

G tự khẳng định rằng nó không thể được chứng minh.

Nhưng G có thể được chứng minh không? Nếu có, điều này có nghĩa là có một số chuỗi công thức chứng minh công thức với số Gödel sub( *n* , *n* , 17). Nhưng đó là điều ngược lại với G, tức là không có bằng chứng nào như vậy tồn tại. Các mệnh đề đối lập, G và ~G, không thể cùng đúng trong một hệ tiên đề nhất quán. Vì vậy, chân lý của G phải không thể quyết định được.

Tuy nhiên, mặc dù G không thể quyết định được, nhưng rõ ràng là đúng. G nói rằng, “Công thức với số Gödel sub( *n* , *n* , 17) không thể được chứng minh,” và đó chính xác là những gì chúng ta thấy là đúng! Vì G đúng nhưng không thể quyết định được trong hệ thống tiên đề được sử dụng để xây dựng nó, nên hệ thống đó không đầy đủ.

Bạn có thể nghĩ rằng bạn có thể chỉ cần đưa ra một số tiên đề bổ sung, sử dụng nó để chứng minh G và giải quyết nghịch lý. Nhưng bạn không thể. Gödel đã chỉ ra rằng hệ tiên đề tăng cường sẽ cho phép xây dựng một công thức mới, đúng Gʹ (theo một bản thiết kế tương tự như trước) mà không thể chứng minh được trong hệ thống tăng cường mới. Trong nỗ lực hướng tới một hệ thống toán học hoàn chỉnh, bạn không bao giờ có thể bắt được đuôi của chính mình.

**Không có bằng chứng về sự nhất quán**

Chúng ta đã học rằng nếu một tập hợp các tiên đề nhất quán thì nó không đầy đủ. Đó là định lý bất toàn đầu tiên của Gödel. Định lý thứ hai — rằng không có tập hợp các tiên đề nào có thể chứng minh được tính nhất quán của chính nó — dễ dàng theo sau.

Sẽ có ý nghĩa gì nếu một tập hợp các tiên đề có thể chứng minh rằng nó sẽ không bao giờ tạo ra mâu thuẫn? Điều đó có nghĩa là tồn tại một chuỗi các công thức được xây dựng từ các tiên đề này để chứng minh công thức có nghĩa là, về mặt siêu hình học, "Tập hợp các tiên đề này là nhất quán". Theo định lý đầu tiên, tập hợp các tiên đề này sau đó sẽ không đầy đủ.

Nhưng “Tập hợp các tiên đề không đầy đủ” cũng giống như nói “Có một công thức đúng mà không thể chứng minh được”. Câu phát biểu này tương đương với công thức G của chúng ta. Và chúng ta biết các tiên đề không thể chứng minh được G.

Vì vậy, Gödel đã tạo ra một bằng chứng bằng phản chứng: Nếu một tập hợp các tiên đề có thể chứng minh được tính nhất quán của chính nó, thì chúng ta có thể chứng minh được G. Nhưng chúng ta không thể. Do đó, không có tập hợp các tiên đề nào có thể chứng minh được tính nhất quán của chính nó.

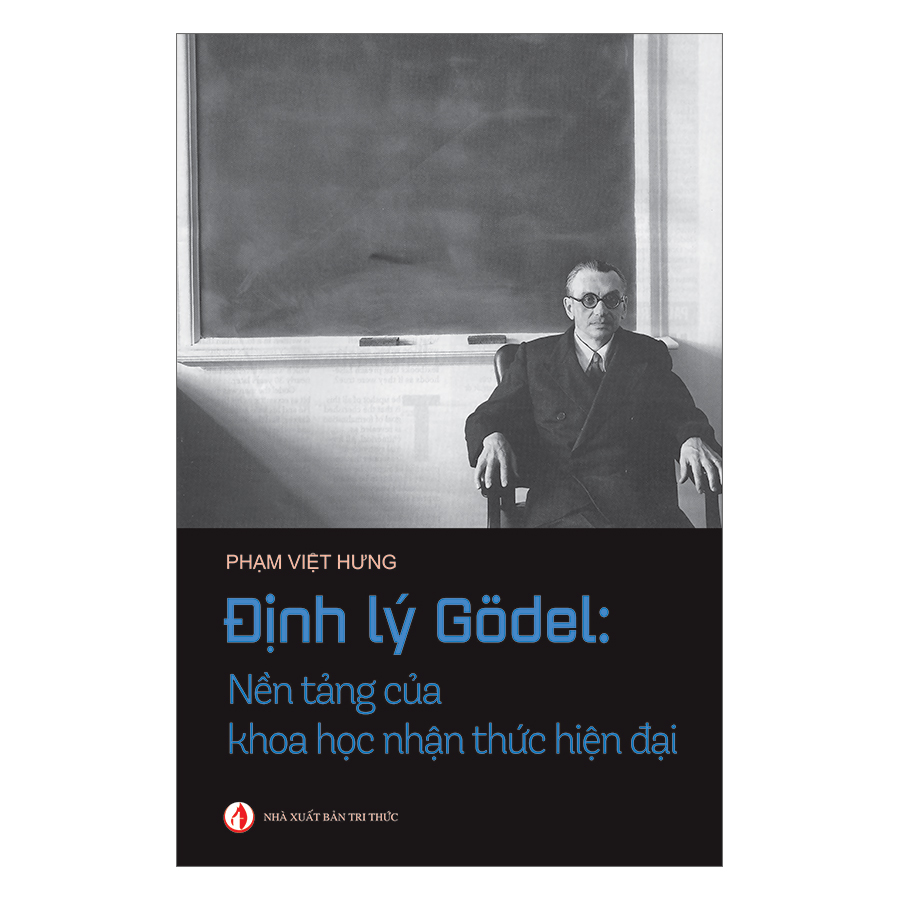
Bằng chứng của Gödel đã giết chết nỗ lực tìm kiếm một hệ thống toán học hoàn chỉnh và nhất quán (Nagel và Newman đã viết vào năm 1958 rằng ý nghĩa của sự không hoàn thiện “vẫn chưa được hiểu thấu đáo”). Điều này vẫn đúng cho đến ngày nay.

\* Đối với những ai tò mò, câu lệnh này có nội dung như sau: “Tồn tại một số nguyên *x* sao cho *x* nhân với 2 bằng 2¹ × 3 8 × 5 6 × 7 5 × 11 6 × 13 9 , và không tồn tại bất kỳ số nguyên *x* nào sao cho *x* nhân với 4 bằng 2¹ × 3 8 × 5 6  × 7 5 × 11 6 × 13 9. ” Công thức tương ứng là:

(∃ *x* )( *x* × *ss* 0 =  *sss*  … *sss* 0) ⋅ ~(∃ *x* )( *x* ×  *ssss* 0 =  *sss* … *sss* 0)

trong đó  *sss*  … *sss* 0 biểu thị cho 2¹ × 3 8 × 5 6 × 7 5 × 11 6 × 13 9 bản sao của ký hiệu kế thừa s. Ký hiệu ⋅ có nghĩa là “và”, và là cách viết tắt cho một biểu thức dài hơn trong từ vựng cơ bản:  *p*  ⋅  *q* biểu thị cho ~(~ *p* ∨ ~ *q* ). [[Quay lại bài viết.]](https://www.quantamagazine.org/how-godels-proof-works-20200714/#jump2)

*Bài viết này đã được đăng lại trên*[*Wired.com*](https://www.wired.com/story/how-godels-proof-works/)*.*



**Chú thích:**

Định lý bất toàn của Gödel, được nhà toán học Kurt Gödel phát hiện vào năm 1930, là kết quả cơ bản trong lĩnh vực toán học.

-Định lý bất toàn đầu tiên nói rằng trong bất kỳ hệ tiên đề chính thức nào đủ sức biểu đạt để biểu diễn số học cơ bản, **sẽ luôn tồn tại những mệnh đề đúng không thể chứng minh được** trong hệ đó.

-Định lý bất toàn thứ hai xây dựng trên định lý thứ nhất và nêu rằng **không có hệ thống chính thức nhất quán nào có thể chứng minh được tính nhất quán của chính nó**. Hoặc nếu một hệ thống có khả năng biểu thị số học cơ bản và nhất quán (có nghĩa là nó không suy ra mâu thuẫn), thì sẽ tồn tại các tuyên bố trong hệ thống thể hiện tính không thể chứng minh của chính nó.

Có một số hệ quả rút ra từ định lý bất toàn của Gödel như sau:

-**Hạn chế của Hệ thống Hình thức**: Các định lý chứng minh rằng không có hệ thống tiên đề hình thức nào có thể nắm bắt được tất cả các chân lý của số học. Sẽ luôn có những tuyên bố đúng nằm ngoài tầm với của chứng minh hình thức.

-**Tính không hoàn thiện cố hữu**: Định lý Gödel cho thấy các hệ thống toán học về bản chất là không hoàn thiện, và sẽ luôn có những câu hỏi không thể trả lời được trong một hệ thống nhất định.

-**Sự thật không thể chứng minh**: Các định lý ngụ ý rằng có những phát biểu toán học đúng mãi mãi không thể chứng minh được trong một hệ thống cụ thể. Điều này thách thức ý tưởng rằng tất cả các sự thật toán học có thể được suy ra từ một tập hợp tiên đề cố định.

-**Tính không thể quyết định**: Các định lý thiết lập sự tồn tại của các mệnh đề không thể quyết định—các phát biểu không thể xác định là đúng hay sai trong một hệ thống. Điều này đặt ra câu hỏi về bản chất của chân lý toán học.

-**Siêu toán học**: Công trình của Gödel thúc đẩy sự phát triển của siêu toán học, một lĩnh vực nghiên cứu nền tảng và hạn chế của các hệ thống chính thức. Nó dẫn đến những hiểu biết mới về triết học toán học và bản chất của bằng chứng.

Nhìn chung, các định lý bất toàn của Gödel đã làm tan vỡ hy vọng đạt được một hệ thống tiên đề toán học đầy đủ và nhất quán.

**Phụ lục: Lời giải thích ngắn nhất thế giới về định lý Gödel**

Chúng ta có một loại máy in ra các câu lệnh bằng một loại ngôn ngữ nào đó. Nó không nhất thiết phải là một máy in câu lệnh chính xác; nó có thể là một loại kỹ thuật để lấy các câu lệnh và quyết định xem chúng có đúng không. Nhưng hãy nghĩ về nó như một máy in ra các câu lệnh.

Đặc biệt, một số câu lệnh mà máy có thể (hoặc không thể) in ra trông như sau:

P\* x (có nghĩa là máy sẽ in x )

NP\* x (có nghĩa là máy sẽ không bao giờ in x )

PR\* x (có nghĩa là máy sẽ in xx )

NPR\* x (có nghĩa là máy sẽ không bao giờ in xx )

Ví dụ, NPR\*FOO có nghĩa là máy sẽ không bao giờ in FOOFOO . NP\*FOOFOO cũng có nghĩa tương tự. Cho đến giờ thì vẫn ổn.

Bây giờ, hãy xem xét câu lệnh NPR\*NPR\* . Câu lệnh này khẳng định rằng máy sẽ không bao giờ in NPR\*NPR\* .

Hoặc là máy in NPR\*NPR\* hoặc không bao giờ in NPR\*NPR\* .

Nếu máy in NPR\*NPR\* , nó đã in ra một câu lệnh sai. Nhưng nếu máy không bao giờ in NPR\*NPR\* , thì NPR\*NPR\* là một câu lệnh đúng mà máy không bao giờ in.

Vì vậy, đôi khi máy in ra những câu lệnh sai hoặc có những câu lệnh đúng nhưng không bao giờ in ra.

Vì vậy, bất kỳ máy nào chỉ in ra những câu lệnh đúng thì phải không in ra được một số câu lệnh đúng.

Hoặc ngược lại, bất kỳ máy nào in ra mọi câu lệnh đúng có thể cũng phải in ra một số câu lệnh sai.

Bằng chứng của định lý Gödel cho thấy có những phát biểu về số học thuần túy về cơ bản thể hiện NPR\*NPR\* ; thủ thuật là tìm cách nào đó để thể hiện NPR\*NPR\* như một phát biểu về số học, và hầu hết các chi tiết kỹ thuật (và sự thông minh!) của định lý Gödel đều liên quan đến thủ thuật này. Nhưng một khi thủ thuật này được thực hiện, lập luận có thể được áp dụng cho bất kỳ máy móc hoặc phương pháp nào khác để tạo ra các phát biểu về số học.

Sau đó, kết luận được dịch trực tiếp: bất kỳ máy móc hoặc phương pháp nào tạo ra các câu lệnh về số học đôi khi cũng tạo ra các câu lệnh sai hoặc có những câu lệnh đúng về số học mà nó không bao giờ tạo ra. Bởi vì nếu nó tạo ra thứ gì đó như NPR\*NPR\* thì nó sai, nhưng nếu nó không tạo ra được NPR\*NPR\* thì đó là một câu lệnh đúng mà nó đã không tạo ra được.

Vì vậy, bất kỳ máy móc hoặc phương pháp nào chỉ đưa ra những tuyên bố đúng về số học thì chắc chắn không thể đưa ra một số tuyên bố đúng.

(Lời giải thích này xuất hiện trong cuốn sách 5000 BC and Other Philosophical Fantasies của Smullyan , chương 3, mục 65, trong Chương 16 của “The Lady or the Tiger”, "Những cỗ máy nói về chính chúng", và trong The Mystery of Scheherezade .)